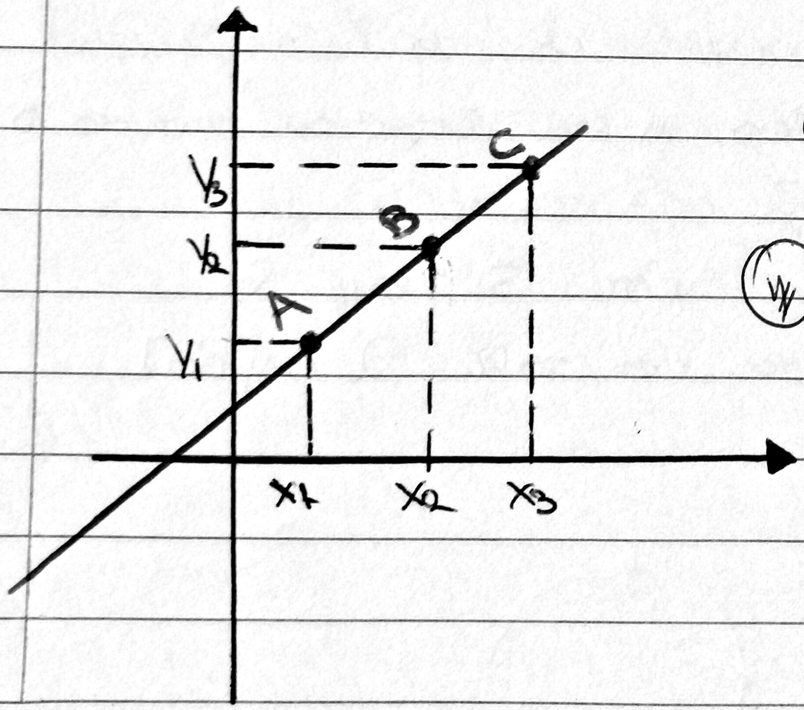
23/10/2018

3º ΜΑΘΗΜΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ας θεωρήσουμε το καρτεσιανό επίπεδο $\mathbb{R}^2$ και ως ευθεία ορίζω υποσύνολα της μορφής: $\ell = \{ax+by=c : a^2+b^2 \neq 0\}$

- Έστω, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ τρία συνευθειακά σημεία



- Ορίζω, ότι $A*B*C$ αν-ν
$x_2 \in (x_1, x_3)$ ή $x_2 \in (x_3, x_1)$
ή $y_2 \in (y_1, y_3)$ ή $y_2 \in (y_3, y_1)$

● Στο παράδειγμα : $f(x,y) = ax+by-c$

● $\mathbb{R}^2 - \{ \ell \} = P_f \cup N_f$

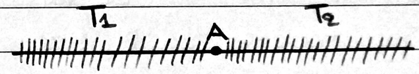
→ $P_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) > 0 \}$

→ $N_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) < 0 \}$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω, ℓ μια ευθεία. Τότε, $S \setminus \{ \ell \}$ χωρίζεται σε δυο συνιστώσες S_1, S_2 με $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Τα S_1, S_2: λέγονται ημιεπίπεδα με ακμή το ℓ.

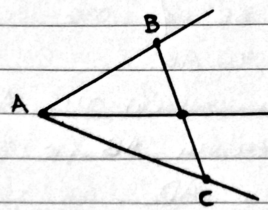
ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω, ℓ: ευθεία και $A \in \ell \Rightarrow$ Το σύνολο $\ell - \{A\} = T_1 \cup T_2$ με $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.



T_1, T_2: ημιευθείες με αρχή A.

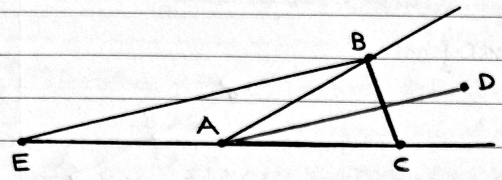
ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω, γωνία $\angle BAC$ και σημείο D στο εσωτερικό της.

[Εσωτερικό γωνίας = Τομή δυο ημιεπιπέδων $\neq 0$].



Τότε, η ημιευθεία (AD) αρχή του A τέμνει το τμήμα BC

[ΑΠΟΔΕΙΞΗ]:



- Έστω, E: σημείο στην AC ώστε E∗A∗C
  Θα εφαρμόσουμε το αξίωμα Pasch στο τρίγωνο BEC και την AD.

- Η ημιευθεία AD τέμνει την EC στο A
  Η AD δεν περιέχει το B, ούτε το C.

- Αρκεί, ν.δ.ο η AD δεν τέμνει την BE.
  Η BE έχει ένα και μόνο σημείο με την AB το B

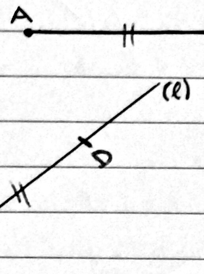
∗ Άρα, όλα τα σημεία της BE (εκτός του B) είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή το AB.
Από κατασκευής το C είναι στο αντικείμενο ημιεπίπεδο.
και έτσι όλα τα σημεία της BE ∉ στο ίδιο ημιεπίπεδο με το C ως προς το AB.
Επιπλέον, πάλι από υπόθεση τα σημεία της AD ∈ στο ίδιο ημιεπίπεδο προς την ευθεία AB με το C
Άρα, η BE δεν τέμνει την AD

$\xRightarrow{\text{Pasch}}$ Η AD: τέμνει την BC σε σημείο D.

Ζ ➜ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

- Υποθέτω, ότι $\exists$ μια σχέση ισότητας μεταξύ ευθυγράμμων τμημάτων
- Αν δυο τμήματα AB και CD ΙΣΑ $\Rightarrow AB = CD$

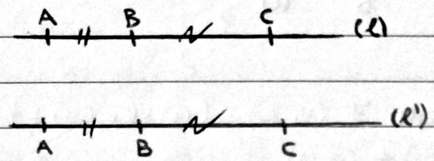
I1: Δοθέντος, ενός ευθυγράμμου τμήματος AB και μιας ημι-ευθείας ℓ με αρχή το σημείο C, υπάρχει μοναδικό D στην ℓ έτσι ώστε: $AB=CD$



I2: Αν $\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ AB=EF \end{array}\right\} \Rightarrow CD=EF.$

I3: Έστω, τρία σημεία A,B,C επί μιας ευθείας με $A*B*C$ και 3 άλλα σημεία $A'*B'*C'$

Εάν, $AB=A'B'$ και $BC=B'C' \Rightarrow AC=A'C'$

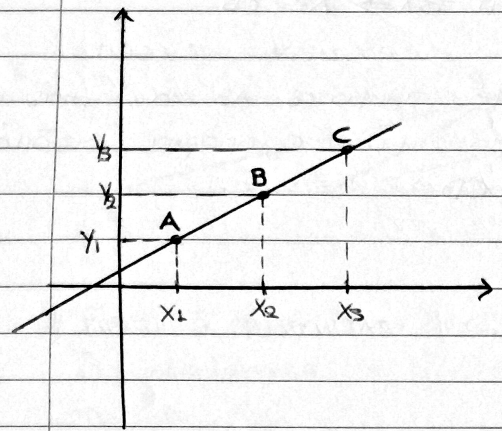


- Δηλ. η απόσταση να έχει προσθετική ιδιότητα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.

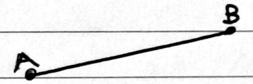
Παράδειγμα

Ας ορίσουμε, το $\mathbb{R}^2$, όπου οι ευθείες έχουν οριστεί με το συνήθη με το συνήθη τρόπο. Το ίδιο και η διάταξη

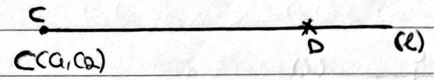


- Ορίζω, ως απόσταση των σημείων $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ ως εξής:
  $d(A,B)=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$

- Σ_1: Έστω, ότι $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$ και μια ημιευθεία ℓ με αρχή το C



- Αναρωτιόμαστε, αν $\exists\ D\in\ell$ έτσι, ώστε: $d(C,D)=d(A,B)$.



- Εφόσον, ℓ: δεδομένη $\exists\ (v_1,v_2)$: $\ell(t)=(c_1,c_2)+t(v_1,v_2)$, $t\geq 0$
  Επίσης $(v_1,v_2)\neq(0,0)$
- Υπάρχει, $t_*>0$: $d(\ell(t_*),c)=d(A,B)$;
- $d(A,B)=d(\ell(t_*),C)=|c_1+t_*v_1-c_1|+|c_2+t_*v_2-c_2|$

$$= t_*\{|v_1|+|v_2|\}$$

$$\Rightarrow\quad t_*=\frac{d(A,B)}{|v_1|+|v_2|}.$$

- I_2 = Άμεσο.

- I_3: Ελέγχω, την προσθετική ιδιότητα.

→ Ας υποθέσουμε ότι A, B, C είναι 3-συνευθειακά: $A * B * C$

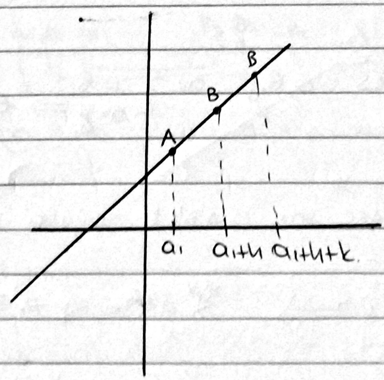
Θα δ.ο.: $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$.

- Ας υποθέσουμε, ότι: ℓ έχει εξίσωση $y = mx + b$

⇒ Τότε, $\exists\ h, k > 0$: $B(a_1 + h,\ a_2 + mh)$

$C(a_1 + h + k,\ a_2 + m(h+k))$

$$\Rightarrow \quad d(A,B) = h + h|m|$$
$$d(B,C) = k + k|m|$$
$$d(A,C) = (h+k) + (h+k)|m|.$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
- $A(-1,-1)$

$B(0,0)$

$\Gamma(2,1)$

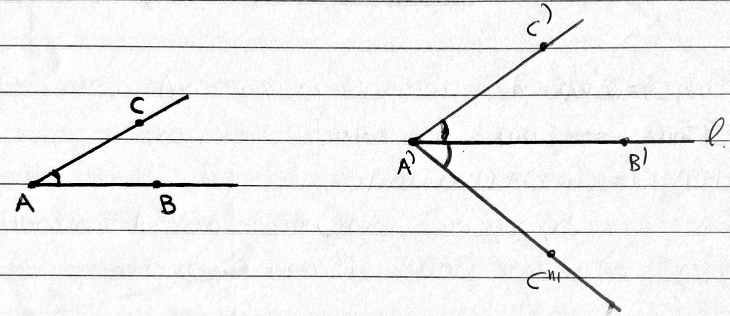
- $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$

ΟΧΙ – ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΙΑ.

Ζ→ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΓΩΝΙΩΝ ←Σ

- Ορίσαμε, μια θέση ισότητας για τις γωνίες.

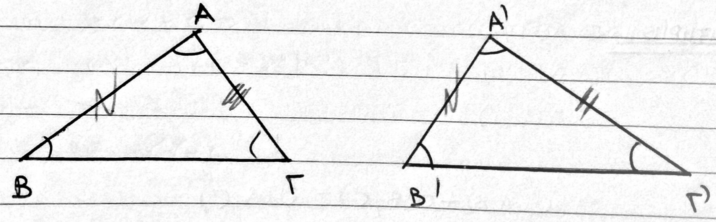
Ι4: Δοθείσας γωνίας με κορυφή το A $\sphericalangle BAC$ και μιας ημιευθείας $A'B'$ με αρχή το A' $\Rightarrow$ υπάρχει ημιευθεία $A'C'$ σε κάθε ημιεπίπεδο με ακμή την ευθεία $A'B'$: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$



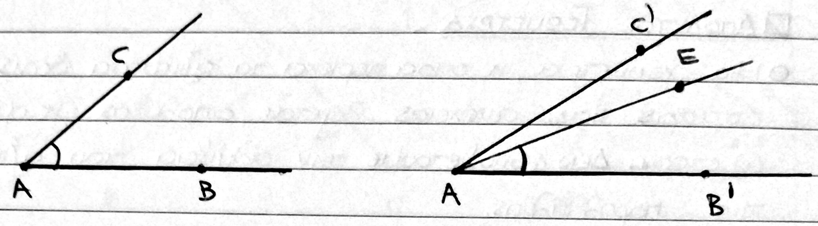
Ι5: Για 3 γωνίες α, β, γ αν $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \gamma \end{cases} \Rightarrow \beta = \gamma$

Ι6: Έστω, ότι ABC και $A'B'C'$ τρίγωνα ώστε

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' \\ \sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B' \end{array}$$

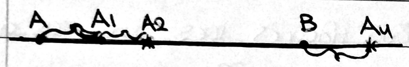


Ορισμος: Μια γωνία $\measuredangle BAC$ λέμε ότι είναι μικρότερη της γωνίας $\measuredangle B'A'C'$ όταν $\exists$ ημιευθεία $A'E'$ στο εσωτερικό της $\measuredangle B'A'C'$: $\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'E$

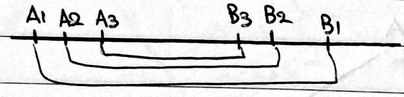


Αξιώματα Συνεχείας

Σ.1: Έστω, ότι A, B, A_1 : $A * A_1 * B$



Σ.2:



Σίγουρα, θα $\exists$ ένα σημείο που θα $\in$ στο πιο μικρό δ/μα.